

УДК 539.3 + 539.4

УРАВНЕНИЕ СКОРОСТИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ О ГИДРОРАЗРЫВЕ

© 2011 г. А. М. Линьков

Представлено академиком Н.Ф. Морозовым 17.03.2011 г.

Получено 31.03.2011 г.

Математическое моделирование разрываемой жидкостью трещины, начатое в [1], важно для использования гидроразрыва. Предлагавшиеся модели основывались на интегральной форме закона сохранения массы (см., например, [2–5]). В сообщении показано, что использование локального уравнения скорости обнаруживает особенность проблемы: она некорректна, если рассматривается как граничная задача. Уравнение позволяет также регуляризовать проблему и эффективно решить ее.

Покажем вначале, что уравнение скорости фундаментально в том смысле, что не зависит от конкретного закона вязкости жидкости. Уравнение сохранения массы в узком канале между близкими границами для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{dVe}{dt} = \int_{S_l} \frac{\partial w}{\partial t} dS + \int_{L_l(t)} w_*(x_*) v_{n*}(x_*) dL, \quad (1)$$

где S_l – срединная поверхность, w – высота (раскрытие) канала, $L_l(t)$ – контур фронта жидкости в момент t , x_* – точка на фронте, v_{n*} – нормальная к L_l составляющая скорости частиц жидкости, осредненная по высоте. Подчеркнем, что в (1) средняя скорость v_{n*} представляет также скорость распространения фронта. Поскольку $q_{n*}(x_*) = w_*(x_*) v_{n*}(x_*)$ – поток через все сечение фронта, получаем фундаментальное уравнение, выражающее скорость фронта через поток и раскрытие,

$$v_{n*}(x_*) = \frac{q_{n*}(x_*)}{w_*(x_*)}. \quad (2)$$

Используем уравнение Рейнольдса для течения вязкой несжимаемой жидкости в узком канале

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D(w, p) \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) - q_e = 0, \quad (3)$$

где D – заданная функция или оператор, p – давление, осредненное по высоте канала, v_i , $i = 1, 2$, – компоненты осредненной скорости частиц жидкости, q_e – заданный поток жидкости извне; декартовы координаты x_1, x_2 расположены в плоскости гидроразрыва. При рассмотрении гидроразрыва ставится начальное условие нулевого раскрытия вдоль траектории трещины. Граничным условием на фронте жидкости служит условие заданного потока q_0 на части L_q и заданного давления p_0 на оставшейся части L_p контура фронта L_l :

$$q_n(x) = q_0(x), \quad x \in L_q; \quad p(x) = p_0(x), \quad x \in L_p. \quad (4)$$

В уравнении (3) раскрытие неизвестно, и для его определения следует привлечь уравнение теории упругости, связывающее раскрытие w и давление p . Кроме того, используется условие линейной механики разрушения $K_I = K_{IC}$, где K_I – коэффициент интенсивности напряжений, K_{IC} – его критическое значение.

Ввиду (2) задание граничных условий (4) означает, что в точках фронта жидкости поставлено два условия. Поскольку при численном решении приходится фиксировать границу фронта на каждой итерации, это ведет к трудностям, обычным для переопределенных задач [7–9]. Для отыскания способа преодоления затруднений рассмотрим задачу Нордгрена [2]. В ней изучается прямолинейная трещина вдоль оси x (рис. 1) при допущении, что давление p пропорционально раскрытию w . При отсутствии утечки уравнение (3) после нормировки принимает вид [2]:

$$\frac{\partial^2 w^4}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Граничные условия включают задание нормированного потока q_0 в устье трещины $x = 0$:

$$\frac{\partial w^4}{\partial x} = -q_0 \quad (6)$$

и нулевого раскрытия (и потока) на фронте жидкости $x = x_*$, который совпадает с концом трещины:

$$w(x_*) = 0. \quad (7)$$

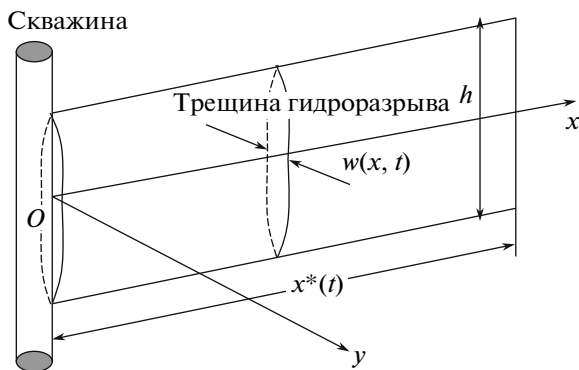


Рис. 1. Схема задачи о распространении трещины гидроразрыва.

Раскрытие считается положительным при $0 \leq x < x_*$. Запишем также уравнение скорости (2), которое принимает вид

$$v_* = -\frac{4}{3} \frac{\partial w^3}{\partial x} \Big|_{x=x_*}. \quad (8)$$

Проблема автомодельная, поэтому решение представимо в форме $w = t^{1/5} \psi(\xi)$, где $\xi = xt^{-4/5}$, так что $x = \xi t^{4/5}$, $x_* = \xi_* t^{4/5}$, $v_* = \frac{dx_*}{dt} = 0.8 \xi_* t^{-1/5}$, ξ_* – автомодельная координата фронта жидкости, зависящая только от заданного потока q_0 . Тогда уравнение (5) становится уравнением в обычных производных:

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + a \left(y, \frac{dy}{d\xi}, \xi \right) \frac{dy}{d\xi} - \frac{3}{20} = 0, \quad (9)$$

где $y(\xi) = \psi^3(\xi)$, $a \left(y, \frac{dy}{d\xi}, \xi \right) = \frac{1}{3y} \left(\frac{dy}{d\xi} + 0.6\xi \right)$. Для граничных условий (6) и (7) имеем

$$\frac{dy}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = -0.75 \frac{q_0}{\sqrt[3]{y(0)}}, \quad (10)$$

$$y(\xi_*) = 0, \quad (11)$$

а уравнение скорости (8) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_*} = -0.6\xi_*. \quad (12)$$

Нетрудно понять, что $C_* = \frac{q_0^{0.6}}{\xi_*}$ и $C_0 = \frac{y(0)}{\xi_*^2}$ – постоянные, не зависящие от потока q_0 . Поскольку $\xi_* = \frac{q_0^{0.6}}{C_*}$, величины q_0 или ξ_* можно задавать из соображений удобства (как и конкретные значения q_0 или ξ_*).

Зафиксируем ξ_* . Тогда согласно (11), (12) в точке ξ_* заданы как функция y , так и ее производная $\frac{dy}{d\xi}$. Следовательно, для уравнения второго порядка (9) мы имеем задачу Коши. Ее решение определяет $y(0)$ и $\frac{dy}{d\xi} \Big|_{\xi=0}$ и, следовательно, поток q_0 при $\xi = 0$. Поэтому даже при малой ошибке в задании q_0 в (10) решения граничной задачи (9)–(11) не существует. Согласно определению [7], граничная задача (9)–(11) некорректна и требует регуляризации [8, 9].

Напротив, задача Коши (9), (11), (12) корректна. Ее численное решение позволяет получить эталонные результаты. С этой целью использована схема Рунге–Кутты четвертого порядка для эквивалентной (9) системы двух дифференциальных уравнений с переменными $y_1(\xi) = y(\xi)$, $y_2(\xi) = \frac{dy}{d\xi}$. Постоянные C_* и C_0 , вычисленные с семью верными знаками, таковы: $C_* = 0.7570913$, $C_0 = 0.5820636$. Для значения $q_0 = \frac{2}{\pi}$, использованного Нордгреном [2], получено $\xi_* = 1.0073486$, $\psi(0) = 0.8390285$ против значений $\xi_* = 1.01$, $\psi(0) = 0.83$, приведенных этим автором с точностью $\sim 1\%$. Эталонные значения функции $y(\xi)$ и ее производной, полученные с точностью не менее пяти знаков, служили для оценки точности последующих решений разными способами.

Оказалось, что при решении конечными разностями некорректной граничной задачи (9)–(11) невозможно получить больше, чем два верных знака. Существенно, что такая точность достигалась даже на грубой сетке: всего лишь при 100 узлах. Следовательно, использование грубой сетки служит регуляризацией проблемы, если не требуется высокой точности. Для мелких сеток наблюдалось сильное искажение решения около фронта жидкости $\xi = \xi_*$.

Также безуспешными оказались и попытки решить задачу (5)–(7) шагами по времени с применением конечных разностей для аппроксимации $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial w}{\partial x}$ на шагах времени. Никким образом мы не могли получить верную третью цифру, и решение сильно искажалось около фронта. Вновь мелкие сетки не давали улучшения точности по сравнению с грубой сеткой, имеющей шаг $\Delta x = \frac{\Delta x}{x_*} = 0.01$.

Эксперименты подтверждают, что точное решение обсуждаемой задачи нельзя построить без регуляризации. Возможный метод преодоления

трудности следует из условий (11), (12). Действительно, из них вытекает приближенное уравнение $y \approx 0.6\xi_*(\xi_* - \xi)$ для точек около фронта. Следовательно, вместо того, чтобы ставить граничное условие на фронте $\xi = \xi_*$, можно поставить его в точке $\xi_\varepsilon = \xi_*(1 - \varepsilon)$ на малом относительном расстоянии ε от фронта:

$$y(\xi_\varepsilon) = 0.6\xi_*^2\varepsilon. \quad (13)$$

Граничная задача (9), (10), (13) корректна, и ее можно решить конечными разностями. Оказалось, что при $\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-4}$ решение для шагов

$$\Delta\zeta = \frac{\Delta\xi}{\xi_*} = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$$

совпадает с эталонным решением. Результаты устойчивы если только ε и $\Delta\zeta$ не слишком малы одновременно ($\varepsilon, \Delta\zeta > 10^{-5}$). Однако как следовало ожидать, решение искажается, когда ε и $\Delta\zeta$ малы одновременно; если $\varepsilon = \Delta\zeta = 10^{-6}$, то результаты совершенно не верные. Из расчетов следует также, что с ростом ε точность падает и перестает зависеть от шага, если он достаточно мал. Например, для шага $\Delta\zeta = 0.1$ имеем точность в 1% при $\varepsilon = 0.01$, и эта точность остается такой же даже при $\varepsilon = 10^{-9}$.

Суть метода состоит в использовании уравнения скорости совместно с заданным граничным условием для формулировки граничного условия на малом относительном расстоянии ε позади фронта, а не на самом фронте. Такой подход можно назвать ε -регуляризацией. Она применима в общих одномерных и двумерных случаях, когда автомодельная формулировка невозможна или не используется. Для иллюстрации ε -регуляризация применена к исходному уравнению (5) при граничных условиях (6), (7). В терминах переменной $Y = w^3$ заданное условие (7) и уравнение скорости (8) дают

$$Y(x, t) \approx 0.75x_*(t)v_*(t) \left[1 - \frac{x}{x_*(t)} \right]$$

для точек около фронта. Тогда граничное условие в точке $x_\varepsilon = x_*(1 - \varepsilon)$ на относительном расстоянии ε от фронта есть

$$Y(x_\varepsilon, t) = 0.75x_*(t)v_*(t)\varepsilon. \quad (14)$$

Следовательно, теперь задача состоит в решении (5) при начальном условии нулевого раскрытия и при граничных условиях (6) и (14). Численные эксперименты подтвердили, что ε -регуляризация позволяет преодолеть отмеченные трудности и достичь высокой точности.

Суммируем выводы работы:

полученное уравнение скорости может служить для изучения продвижения трещины гидроразрыва методами теории распространяющихся поверхностей;

при численном моделировании трещины гидроразрыва полезно применять ε -регуляризацию, состоящую в постановке граничного условия на малом относительном расстоянии позади фронта;

предложенный метод позволяет эффективно решать задачи о гидроразрыве.

Автор признателен программе Marie Curie IAPP Европейского Союза (грант 251475) за поддержку этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khristianovich S.A., Zheltov V.P.* Proc. IV World Petroleum Congress. Rome, 1955. P. 579–586.
2. *Nordgren R.P.* // Soc. Petroleum Eng. J. 1972. V. 12. № 8. P. 306–314.
3. *Spence D.A., Sharp P.W.* // Proc. Roy Soc. London. Ser. A. 1985. V. 400. P. 289–313.
4. *Adachi J., Siebrits E., et al.* // Intern. J. Rock Mech. Mining Sci. 2007. V. 44. P. 739–757.
5. *Hu J., Garagash D.I.* // J. Eng. Mech. ASCE. 2010. V. 136. № 9. P. 1152–1166.
6. *Sethian J.A.* Level Set Methods and Fast Marching Methods. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 370 p.
7. *Hadamard J.* Princeton University Bulletin. Princeton, 1902. P. 49–52.
8. *Тихонов А.Н.* // ДАН. 1963. V. 151. P. 501–504.
9. *Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.* Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 1999. 702 с.