



# Szybka wielobiegunowa metoda elementów brzegowych w analizie układów liniowosprężystych

## Algorytm SWMEB. Część 1.

dr inż. Jacek Ptaszny

Rzeszów, 15-16.04.2011



# Plan prezentacji

- 1 Ogólny opis metody
- 2 Szereg wielobiegunowy
- 3 Transformacja W-W
- 4 Szereg lokalny i transformacja W-L
- 5 Transformacja L-L
- 6 Obliczanie naprężeń
- 7 Literatura



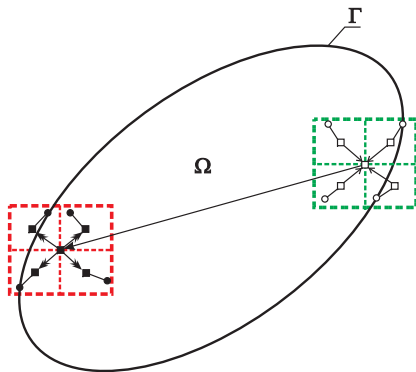
# Plan prezentacji

- 1 Ogólny opis metody
- 2 Szereg wielobiegunowy
- 3 Transformacja W-W
- 4 Szereg lokalny i transformacja W-L
- 5 Transformacja L-L
- 6 Obliczanie naprężeń
- 7 Literatura



# Ogólny opis metody

## Grupowanie i rozdział wpływu



- Punkty całkowania
  - Punkty rozwinięcia wielobiegunowego
  - Punkty rozwinięcia lokalnego
  - Punkty kolokacji
- Transformacja  $W-W$
- Transformacja  $W-L$
- Transformacja  $L-L$



# Ogólny opis metody

## Macierzowy układ równań

$$[H]^{bl}\{U\} + \{HU\}^{odl} = [G]^{bl}\{T\} + \{GT\}^{odl} + \{B\}^{bl} + \{B\}^{odl} \quad (1)$$

- Macierze wpływu **obszaru bliskiego** obliczane metodą bezpośrednią
- Macierze wpływu **obszaru odległego** obliczane w sposób przybliżony, za pomocą **szeregów**



# Ogólny opis metody

## Macierzowy układ równań

$$[H]^{bl}\{U\} + \{HU\}^{odl} = [G]^{bl}\{T\} + \{GT\}^{odl} + \{B\}^{bl} + \{B\}^{odl} \quad (1)$$

- Macierze wpływu **obszaru bliskiego** obliczane metodą bezpośrednią
- Macierze wpływu **obszaru odległego** obliczane w sposób przybliżony, za pomocą **szeregów**



# Ogólny opis metody

## Macierzowy układ równań

$$[H]^{bl}\{U\} + \{HU\}^{odl} = [G]^{bl}\{T\} + \{GT\}^{odl} + \{B\}^{bl} + \{B\}^{odl} \quad (1)$$

- Macierze wpływu **obszaru bliskiego** obliczane metodą bezpośrednią
- Macierze wpływu **obszaru odległego** obliczane w sposób przybliżony, za pomocą **szeregów**



# Ogólny opis metody

## Macierzowy układ równań

W wyniku uwzględnienia warunków brzegowych przez przegrupowanie składników lewej i prawej strony równania:

$$[A]^{bl}\{X\} + \{AX\}^{odl} = [D]^{bl}\{Y\} + \{DY\}^{odl} + \{B\}^{bl} + \{B\}^{odl}, \quad (2)$$

- $\{X\}$  - wektor niewiadomych,
- $\{Y\}$  - wektor znanych wielkości,
- $[A]^{bl}$ ,  $[D]^{bl}$  - macierze utworzone przez przegrupowanie kolumn macierzy  $[H]^{bl}$  i  $[G]^{bl}$ .

W SWMEB nie buduje się całych macierzy, lecz oblicza od razu iloczyn macierzy i wektorów wielkości brzegowych.





# Ogólny opis metody

## Macierzowy układ równań

Układ równań można rozwiązać **tylko metodą iteracyjną**.

Równanie w  $i$ -tej iteracji:

$$\{AX^i\} = \{Z\}. \quad (3)$$

Najczęściej stosuje się metodę GMRES z poprawą uwarunkowania układu równań.



# Plan prezentacji

- 1 Ogólny opis metody
- 2 Szereg wielobiegunowy
- 3 Transformacja W-W
- 4 Szereg lokalny i transformacja W-L
- 5 Transformacja L-L
- 6 Obliczanie naprężeń
- 7 Literatura





# Rozwinięcia potencjałów

## Jądra całek

Rozwiązania podstawowe:

$$U_{ij}(x', x) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [(4\nu - 3)\delta_{ij} \ln(r) + r_{,i}r_{,j}], \quad (5)$$

$$T_{ij}(x', x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] - (1 - 2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\}. \quad (6)$$



# Rozwinięcia potencjałów

Wyrażenia występujące w rozwiązaniu  $U_{ij}(x', x)$

$$\ln r = \operatorname{Re} [\ln(\mathbf{z} - \mathbf{y})] = \operatorname{Re} \left[ \ln \mathbf{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k} \left( \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{z}} \right)^k \right] \quad (7)$$

$$r_{,1} r_{,j} = \frac{r_1 r_j}{r^2} = \operatorname{Re} \frac{1}{\mathbf{r}} r_j = \operatorname{Re} \frac{-1}{\mathbf{z} - \mathbf{y}} r_j = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-\mathbf{y}^k}{\mathbf{z}^{k+1}} r_j \quad (8)$$

$$r_{,2} r_{,j} = \frac{r_2 r_j}{r^2} = -\operatorname{Im} \frac{1}{\mathbf{r}} r_j = \operatorname{Im} \frac{1}{\mathbf{z} - \mathbf{y}} r_j = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{y}^k}{\mathbf{z}^{k+1}} r_j \quad (9)$$

$$|\mathbf{y}| < |\mathbf{z}| \quad (10)$$

$$r_1 = \operatorname{Re}(\mathbf{y} - \mathbf{z}), \quad r_2 = \operatorname{Im}(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \quad (11)$$



# Rozwinięcia potencjałów

Wyrażenia występujące w rozwiązaniu  $T_{ij}(x', x)$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{r_1 n_j}{r^2} = \operatorname{Re} \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{r}} = -\operatorname{Re} \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{z} - \mathbf{y}} = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{n} \frac{-\mathbf{y}^k}{\mathbf{z}^{k+1}} \quad (12)$$

$$\frac{r_{1,1} n_2 - r_{2,2} n_1}{r} = \frac{r_1 n_2 - r_2 n_1}{r^2} = \operatorname{Im} \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{r}} = -\operatorname{Im} \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{z} - \mathbf{y}} = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{n} \frac{-\mathbf{y}^k}{\mathbf{z}^{k+1}} \quad (13)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} 2r_{1,1} r_{2,2} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{2r_1 r_2}{r^2} = -\operatorname{Re}(\mathbf{r}\bar{\mathbf{n}}) \operatorname{Im} \frac{1}{\mathbf{r}^2} = \operatorname{Re}(\mathbf{r}\bar{\mathbf{n}}) \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{-\mathbf{y}^k}{\mathbf{z}^{k+2}} \quad (14)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} 2r_{1,1}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{2r_1^2}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \left( \frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{r^2} \right) \quad (15)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} 2r_{2,2}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{2r_2^2}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \left( \frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} - \frac{r_1^2 - r_2^2}{r^2} \right) \quad (16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{r_1^2 - r_2^2}{r^2} = \operatorname{Re}(\mathbf{r}\bar{\mathbf{n}}) \operatorname{Re} \frac{1}{\mathbf{r}^2} = \operatorname{Re}(\mathbf{r}\bar{\mathbf{n}}) \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\mathbf{y}^k}{\mathbf{z}^{k+2}} \quad (17)$$

$$|\mathbf{y}| < |\mathbf{z}| \quad (18)$$



# Szereg wielobiegunowy

Suma potencjałów warstwy pojedynczej i objętościowego

$$I_{11\alpha}^U(x') + J_{11\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [(4\nu - 3) A_{1\alpha}^0(k) f(\mathbf{z}, k) + A_{1\alpha}(k) f^{\operatorname{Re}}(\mathbf{z}, k + 1) - A_{1\alpha}^{\operatorname{Re}}(k) f(\mathbf{z}, k + 1)], \quad (19)$$

$$I_{12\alpha}^U(x') + J_{12\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [A_{2\alpha}(k) f^{\operatorname{Im}}(\mathbf{z}, k + 1) - A_{2\alpha}^{\operatorname{Im}}(k) f(\mathbf{z}, k + 1)] \quad (20)$$

$$I_{21\alpha}^U(x') + J_{21\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [A_{1\alpha}(k) f^{\operatorname{Im}}(\mathbf{z}, k + 1) - A_{1\alpha}^{\operatorname{Im}}(k) f(\mathbf{z}, k + 1)] \quad (21)$$

$$I_{22\alpha}^U(x') + J_{22\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (4\nu - 3) \operatorname{Re} [A_{2\alpha}^0(k) f(\mathbf{z}, k)] - \operatorname{Im} [A_{2\alpha}(k) f^{\operatorname{Im}}(\mathbf{z}, k + 1)] + \operatorname{Im} [A_{2\alpha}^{\operatorname{Im}}(k) f(\mathbf{z}, k + 1)] \right\} \quad (22)$$



# Szereg wielobiegunowy

Suma potencjałów warstwy pojedynczej i objętościowego

$$I_{11\alpha}^U(x') + J_{11\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [(4\nu - 3) A_{1\alpha}^0(k) f(\mathbf{z}, k) + A_{1\alpha}(k) f^{\operatorname{Re}}(\mathbf{z}, k+1) - A_{1\alpha}^{\operatorname{Re}}(k) f(\mathbf{z}, k+1)], \quad (19)$$

$$I_{12\alpha}^U(x') + J_{12\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [A_{2\alpha}(k) f^{\operatorname{Im}}(\mathbf{z}, k+1) - A_{2\alpha}^{\operatorname{Im}}(k) f(\mathbf{z}, k+1)] \quad (20)$$

$$I_{21\alpha}^U(x') + J_{21\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [A_{1\alpha}(k) f^{\operatorname{Im}}(\mathbf{z}, k+1) - A_{1\alpha}^{\operatorname{Im}}(k) f(\mathbf{z}, k+1)] \quad (21)$$

$$I_{22\alpha}^U(x') + J_{22\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (4\nu - 3) \operatorname{Re} [A_{2\alpha}^0(k) f(\mathbf{z}, k)] - \operatorname{Im} [A_{2\alpha}(k) f^{\operatorname{Im}}(\mathbf{z}, k+1)] + \operatorname{Im} [A_{2\alpha}^{\operatorname{Im}}(k) f(\mathbf{z}, k+1)] \right\} \quad (22)$$

$A_{i\alpha}^{(\cdot)}(k)$  - momenty wielobiegunowe





# Szereg wielobiegunowy

Suma potencjałów warstwy pojedynczej i objętościowego

$$I_{11\alpha}^U(x') + J_{11\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [(4\nu - 3) A_{1\alpha}^0(k) f(\mathbf{z}, k) + A_{1\alpha}(k) f^{Re}(\mathbf{z}, k+1) - A_{1\alpha}^{Re}(k) f(\mathbf{z}, k+1)], \quad (19)$$

$$I_{12\alpha}^U(x') + J_{12\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [A_{2\alpha}(k) f^{lm}(\mathbf{z}, k+1) - A_{2\alpha}^{lm}(k) f(\mathbf{z}, k+1)] \quad (20)$$

$$I_{21\alpha}^U(x') + J_{21\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [A_{1\alpha}(k) f^{lm}(\mathbf{z}, k+1) - A_{1\alpha}^{lm}(k) f(\mathbf{z}, k+1)] \quad (21)$$

$$I_{22\alpha}^U(x') + J_{22\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (4\nu - 3) \operatorname{Re} [A_{2\alpha}^0(k) f(\mathbf{z}, k)] - \operatorname{Im} [A_{2\alpha}(k) f^{lm}(\mathbf{z}, k+1)] + \operatorname{Im} [A_{2\alpha}^{lm}(k) f(\mathbf{z}, k+1)] \right\} \quad (22)$$

$f^{(\cdot)}(\mathbf{z}, k)$  - funkcje wielobiegunowe



# Szereg wielobiegunowy

Suma potencjałów warstwy pojedynczej i objętościowego

Momenty wielobiegunowe:

$$A_{i\alpha}(k) = \sum_{\beta} \int_{\Gamma_{\beta}} \mathbf{y}^k t_{i\beta} d\Gamma(x) + \sum_{\gamma} \int_{\Omega_{\gamma}} \mathbf{y}^k b_{i\gamma} d\Omega(x) \quad (23)$$

$$A_{i\alpha}^{Re}(k) = \sum_{\beta} \int_{\Gamma_{\beta}} \text{Re} \mathbf{y}^k t_{i\beta} d\Gamma(x) + \sum_{\gamma} \int_{\Omega_{\gamma}} \text{Re} \mathbf{y}^k b_{i\gamma} d\Omega(x) \quad (24)$$

$$A_{i\alpha}^{Im}(k) = \sum_{\beta} \int_{\Gamma_{\beta}} \text{Im} \mathbf{y}^k t_{i\beta} d\Gamma(x) + \sum_{\gamma} \int_{\Omega_{\gamma}} \text{Im} \mathbf{y}^k b_{i\gamma} d\Omega(x) \quad (25)$$

dla  $k = 0, 1, \dots, \infty$ , oraz

$$A_{i\alpha}^0(k) = \begin{cases} A_{i\alpha}(k) & \text{dla } k = 0, \\ -\frac{1}{k} A_{i\alpha}(k) & \text{dla } k = 1, 2, \dots, \infty \end{cases} \quad (26)$$



# Szereg wielobiegunowy

## Potencjał warstwy podwójnej

$$I_{11\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2(\nu-1) B_{1\alpha}(k) f(\mathbf{z}, k+1) + [B_{1\alpha}^{2Re}(k) + B_{1\alpha}^{2Im}(k)](k+1) f(\mathbf{z}, k+2) \right. \\ \left. - [B_{1\alpha}^{Re}(k) f^{Re}(\mathbf{z}, k+2) + B_{1\alpha}^{Im}(k) f^{Im}(\mathbf{z}, k+2)](k+1) \right\} \quad (27)$$

$$I_{12\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ - [B_{2\alpha}^{2Re}(k) + B_{2\alpha}^{2Im}(k)](k+1) f(\mathbf{z}, k+2) + [B_{2\alpha}^{Re}(k) f^{Re}(\mathbf{z}, k+2) \right. \\ \left. + B_{2\alpha}^{Im}(k) f^{Im}(\mathbf{z}, k+2)](k+1) + (1-2\nu) B_{2\alpha}(k) f(\mathbf{z}, k+1) \right\} \quad (28)$$

$$I_{21\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ - [B_{1\alpha}^{2Re}(k) + B_{1\alpha}^{2Im}(k)](k+1) f(\mathbf{z}, k+2) + [B_{1\alpha}^{Re}(k) f^{Re}(\mathbf{z}, k+2) \right. \\ \left. + B_{1\alpha}^{Im}(k) f^{Im}(\mathbf{z}, k+2)](k+1) - (1-2\nu) B_{1\alpha}(k) f(\mathbf{z}, k+1) \right\} \quad (29)$$

$$I_{22\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2(\nu-1) B_{2\alpha}(k) f(\mathbf{z}, k+1) - [B_{2\alpha}^{2Re}(k) + B_{2\alpha}^{2Im}(k)](k+1) f(\mathbf{z}, k+2) \right. \\ \left. + [B_{2\alpha}^{Re}(k) f^{Re}(\mathbf{z}, k+2) + B_{2\alpha}^{Im}(k) f^{Im}(\mathbf{z}, k+2)](k+1) \right\} \quad (30)$$



# Szereg wielobiegunowy

## Potencjał warstwy podwójnej

$$I_{11\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2(\nu-1) B_{1\alpha}(k) f(\mathbf{z}, k+1) + [B_{1\alpha}^{2Re}(k) + B_{1\alpha}^{2Im}(k)](k+1) f(\mathbf{z}, k+2) \right. \\ \left. - [B_{1\alpha}^{Re}(k) f^{Re}(\mathbf{z}, k+2) + B_{1\alpha}^{Im}(k) f^{Im}(\mathbf{z}, k+2)](k+1) \right\} \quad (27)$$

$$I_{12\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ - [B_{2\alpha}^{2Re}(k) + B_{2\alpha}^{2Im}(k)](k+1) f(\mathbf{z}, k+2) + [B_{2\alpha}^{Re}(k) f^{Re}(\mathbf{z}, k+2) \right. \\ \left. + B_{2\alpha}^{Im}(k) f^{Im}(\mathbf{z}, k+2)](k+1) + (1-2\nu) B_{2\alpha}(k) f(\mathbf{z}, k+1) \right\} \quad (28)$$

$$I_{21\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ - [B_{1\alpha}^{2Re}(k) + B_{1\alpha}^{2Im}(k)](k+1) f(\mathbf{z}, k+2) + [B_{1\alpha}^{Re}(k) f^{Re}(\mathbf{z}, k+2) \right. \\ \left. + B_{1\alpha}^{Im}(k) f^{Im}(\mathbf{z}, k+2)](k+1) - (1-2\nu) B_{1\alpha}(k) f(\mathbf{z}, k+1) \right\} \quad (29)$$

$$I_{22\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2(\nu-1) B_{2\alpha}(k) f(\mathbf{z}, k+1) - [B_{2\alpha}^{2Re}(k) + B_{2\alpha}^{2Im}(k)](k+1) f(\mathbf{z}, k+2) \right. \\ \left. + [B_{2\alpha}^{Re}(k) f^{Re}(\mathbf{z}, k+2) + B_{2\alpha}^{Im}(k) f^{Im}(\mathbf{z}, k+2)](k+1) \right\} \quad (30)$$

$B_{i\alpha}^{(\cdot)}(k)$  - momenty wielobiegunowe



# Szereg wielobiegunowy

## Potencjał warstwy podwójnej

$$I_{11\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2(\nu-1) B_{1\alpha}(k) f(\mathbf{z}, k+1) + [B_{1\alpha}^{2Re}(k) + B_{1\alpha}^{2Im}(k)](k+1) f(\mathbf{z}, k+2) \right. \\ \left. - [B_{1\alpha}^{Re}(k) f^{Re}(\mathbf{z}, k+2) + B_{1\alpha}^{Im}(k) f^{Im}(\mathbf{z}, k+2)](k+1) \right\} \quad (27)$$

$$I_{12\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ - [B_{2\alpha}^{2Re}(k) + B_{2\alpha}^{2Im}(k)](k+1) f(\mathbf{z}, k+2) + [B_{2\alpha}^{Re}(k) f^{Re}(\mathbf{z}, k+2) \right. \\ \left. + B_{2\alpha}^{Im}(k) f^{Im}(\mathbf{z}, k+2)](k+1) + (1-2\nu) B_{2\alpha}(k) f(\mathbf{z}, k+1) \right\} \quad (28)$$

$$I_{21\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ - [B_{1\alpha}^{2Re}(k) + B_{1\alpha}^{2Im}(k)](k+1) f(\mathbf{z}, k+2) + [B_{1\alpha}^{Re}(k) f^{Re}(\mathbf{z}, k+2) \right. \\ \left. + B_{1\alpha}^{Im}(k) f^{Im}(\mathbf{z}, k+2)](k+1) - (1-2\nu) B_{1\alpha}(k) f(\mathbf{z}, k+1) \right\} \quad (29)$$

$$I_{22\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2(\nu-1) B_{2\alpha}(k) f(\mathbf{z}, k+1) - [B_{2\alpha}^{2Re}(k) + B_{2\alpha}^{2Im}(k)](k+1) f(\mathbf{z}, k+2) \right. \\ \left. + [B_{2\alpha}^{Re}(k) f^{Re}(\mathbf{z}, k+2) + B_{2\alpha}^{Im}(k) f^{Im}(\mathbf{z}, k+2)](k+1) \right\} \quad (30)$$

$f^{(\cdot)}(\mathbf{z}, k)$  - funkcje wielobiegunowe



# Szereg wielobiegunowy

## Potencjał warstwy podwójnej

Momenty wielobiegunowe:

$$B_{i\alpha}(k) = \sum_{\beta} \int_{\Gamma_{\beta}} \mathbf{n} \mathbf{y}^k u_{i\beta} d\Gamma(x) \quad (31)$$

$$B_{i\alpha}^{Re}(k) = \sum_{\beta} \int_{\Gamma_{\beta}} \operatorname{Re} \mathbf{n} \mathbf{y}^k u_{i\beta} d\Gamma(x) \quad (32)$$

$$B_{i\alpha}^{Im}(k) = \sum_{\beta} \int_{\Gamma_{\beta}} \operatorname{Im} \mathbf{n} \mathbf{y}^k u_{i\beta} d\Gamma(x) \quad (33)$$

$$B_{i\alpha}^{2Re}(k) = \sum_{\beta} \int_{\Gamma_{\beta}} \operatorname{Re} \mathbf{y} \operatorname{Re} \mathbf{n} \mathbf{y}^k u_{i\beta} d\Gamma(x) \quad (34)$$

$$B_{i\alpha}^{2Im}(k) = \sum_{\beta} \int_{\Gamma_{\beta}} \operatorname{Im} \mathbf{y} \operatorname{Im} \mathbf{n} \mathbf{y}^k u_{i\beta} d\Gamma(x) \quad (35)$$



# Szereg wielobiegunowy

## Funkcje wielobiegunowe

$$f(\mathbf{z}, k) = \begin{cases} \ln \mathbf{z} & \text{dla } k = 0, \\ \mathbf{z}^{-k} & \text{dla } k = 1, 2, \dots, \infty \end{cases} \quad (36)$$

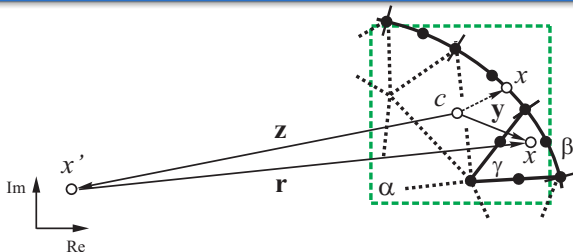
$$f^{Re}(\mathbf{z}, k) = \operatorname{Re} \mathbf{z} \mathbf{z}^{-k} \quad (37)$$

$$f^{Im}(\mathbf{z}, k) = \operatorname{Im} \mathbf{z} \mathbf{z}^{-k} \quad (38)$$



# Szereg wielobiegunowy

## Podsumowanie



$A_{i\alpha}^{(\cdot)}(k), B_{i\alpha}^{(\cdot)}(k)$  - zależne od wektora  $y$   
 $f^{(\cdot)}(z, k)$  - zależne od wektora  $z$

Momenty wielobiegunowe pozwalają na obliczenie składników potencjałów dla różnych punktów kolokacji bez potrzeby ponownego całkowania wzdłuż elementów brzegowych  $\beta$  i po obszarze komórek  $\gamma$ .



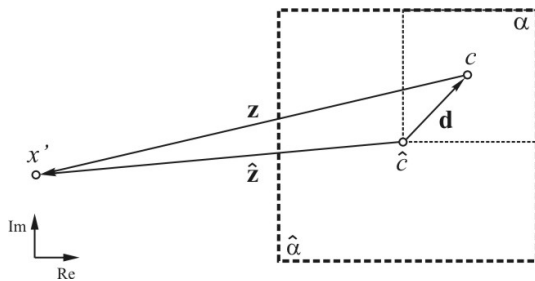


# Plan prezentacji

- 1 Ogólny opis metody
- 2 Szereg wielobiegunowy
- 3 Transformacja W-W
- 4 Szereg lokalny i transformacja W-L
- 5 Transformacja L-L
- 6 Obliczanie naprężeń
- 7 Literatura



# Transformacja W-W



$$|d| < \frac{1}{2}|\hat{z}|$$

*Przesunięcie punktu rozwinięcia wielobiegunowego o wektor  $-d$*



# Transformacja W-W

Wykorzystane zależności:

$$\ln(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{d}) = \ln \hat{\mathbf{z}} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{-1}{l} \left( \frac{\mathbf{d}}{\hat{\mathbf{z}}} \right)^l, \quad (39)$$

$$(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{d})^{-k} = \sum_{l=k}^{\infty} \binom{l-1}{k-1} \frac{\mathbf{d}^{l-k}}{\hat{\mathbf{z}}^k}, \quad (40)$$

dla  $|\mathbf{d}| < |\hat{\mathbf{z}}|$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} (\cdot) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l (\cdot). \quad (41)$$



# Transformacja W-W

## Transformowane momenty

Momenty potencjału warstwy pojedynczej i objętościowego:

$$\hat{A}_{i\alpha}^0(l) = \begin{cases} A_{i\alpha}^0(0) & \text{dla } l = 0, \\ -\frac{1}{l} \mathbf{d}^l A_{i\alpha}^0(0) + \sum_{k=1}^l \binom{l-1}{k-1} \mathbf{d}^{l-k} A_{i\alpha}^0(k) & \text{dla } l = 1, 2, \dots, \infty \end{cases} \quad (39)$$

$$\hat{A}_{i\alpha}(l) = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \mathbf{d}^{l-k} A_{i\alpha}(k), \quad (40)$$

$$\hat{A}_{i\alpha}^{Re}(l) = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \mathbf{d}^{l-k} [A_{i\alpha}^{Re}(k) + \text{Re } \mathbf{d} A_{i\alpha}(k)]. \quad (41)$$

$$\hat{A}_{i\alpha}^{lm}(l) : \text{Re} \rightarrow \text{Im}, A_{i\alpha}^{Re}(k) \rightarrow A_{i\alpha}^{lm}(k)$$



# Transformacja W-W

## Transformowane momenty

Momenty potencjału warstwy podwójnej:

$$\hat{B}_{i\alpha}(l) = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \mathbf{d}^{l-k} B_{i\alpha}(k), \quad (39)$$

$$\hat{B}_{i\alpha}^{Re}(l) = \sum_{k=0}^l \frac{k+1}{l+1} \binom{l+1}{k+1} \mathbf{d}^{l-k} B_{i\alpha}^{Re}(k), \quad (40)$$

$$\hat{B}_{i\alpha}^{2Re}(l) = \sum_{k=0}^l \frac{k+1}{l+1} \binom{l+1}{k+1} \mathbf{d}^{l-k} [B_{i\alpha}^{2Re}(k) + \text{Re} \mathbf{d} B_{i\alpha}^{Re}(k)]. \quad (41)$$

$$\hat{B}_{i\alpha}^{lm}(l), \hat{B}_{i\alpha}^{2lm}(l) : \text{Re} \rightarrow \text{Im}, B_{i\alpha}^{Re}(k) \rightarrow B_{i\alpha}^{lm}(k), B_{i\alpha}^{2Re}(k) \rightarrow B_{i\alpha}^{2lm}(k)$$

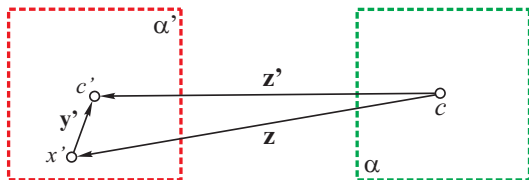


# Plan prezentacji

- 1 Ogólny opis metody
- 2 Szereg wielobiegunowy
- 3 Transformacja W-W
- 4 Szereg lokalny i transformacja W-L**
- 5 Transformacja L-L
- 6 Obliczanie naprężeń
- 7 Literatura



# Rozwinięcia funkcji wielobiegunowych



$$|y'| < \frac{1}{2}|z'|$$

- $\alpha'$  - obszar z punktem kolokacji
- $c'$  - punkt rozwinięcia lokalnego
- $x'$  - punkt kolokacji



# Rozwinięcia funkcji wielobiegunowych

Potencjały zależne od  $U_{ij}$

Wykorzystane zależności:

$$\ln(\mathbf{z}' - \mathbf{y}') = \ln \mathbf{z}' + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{-1}{l} \left( \frac{\mathbf{y}'}{\mathbf{z}'} \right)^l, \quad (42)$$

$$(\mathbf{z}' - \mathbf{y}')^{-k} = (\mathbf{z}')^{-k} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+k-1}{k-1} \left( \frac{\mathbf{y}'}{\mathbf{z}'} \right)^l, \quad (43)$$

dla  $|\mathbf{y}'| < |\mathbf{z}'|$ .





# Szereg lokalny

Potencjały zależne od  $U_{ij}$

$$I_{11\alpha}^U(x') + J_{11\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [(4\nu - 3)E_{1\alpha'}^0(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k) + E_{1\alpha'}^{\operatorname{Re}}(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k) - E_{1\alpha'}(\alpha, k)g^{\operatorname{Re}}(\mathbf{y}', k)], \quad (44)$$

$$I_{12\alpha}^U(x') + J_{12\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [E_{2\alpha'}^{\operatorname{Im}}(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k) - E_{2\alpha'}(\alpha, k)g^{\operatorname{Im}}(\mathbf{y}', k)], \quad (45)$$

$$I_{21\alpha}^U(x') + J_{21\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [E_{1\alpha'}^{\operatorname{Im}}(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k) - E_{1\alpha'}(\alpha, k)g^{\operatorname{Im}}(\mathbf{y}', k)], \quad (46)$$

$$I_{22\alpha}^U(x') + J_{22\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (4\nu - 3) \operatorname{Re} [E_{2\alpha'}^0(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k)] - \operatorname{Im} [E_{2\alpha'}^{\operatorname{Im}}(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k)] + \operatorname{Im} [E_{2\alpha'}(\alpha, k)g^{\operatorname{Im}}(\mathbf{y}', k)] \right\}. \quad (47)$$



# Szereg lokalny

Potencjały zależne od  $U_{ij}$

$$I_{11\alpha}^U(x') + J_{11\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [(4\nu - 3)E_{1\alpha'}^0(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k) + E_{1\alpha'}^{Re}(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k) - E_{1\alpha'}(\alpha, k)g^{Re}(\mathbf{y}', k)], \quad (44)$$

$$I_{12\alpha}^U(x') + J_{12\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [E_{2\alpha'}^{lm}(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k) - E_{2\alpha'}(\alpha, k)g^{lm}(\mathbf{y}', k)], \quad (45)$$

$$I_{21\alpha}^U(x') + J_{21\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [E_{1\alpha'}^{lm}(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k) - E_{1\alpha'}(\alpha, k)g^{lm}(\mathbf{y}', k)], \quad (46)$$

$$I_{22\alpha}^U(x') + J_{22\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (4\nu - 3) \operatorname{Re} [E_{2\alpha'}^0(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k)] - \operatorname{Im} [E_{2\alpha'}^{lm}(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k)] + \operatorname{Im} [E_{2\alpha'}(\alpha, k)g^{lm}(\mathbf{y}', k)] \right\}. \quad (47)$$

$E_{i\alpha'}^{(\cdot)}(\alpha, k)$  - momenty lokalne



# Szereg lokalny

Potencjały zależne od  $U_{ij}$

$$I_{11\alpha}^U(x') + J_{11\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [(4\nu - 3)E_{1\alpha'}^0(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k) + E_{1\alpha'}^{\operatorname{Re}}(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k) - E_{1\alpha'}(\alpha, k)g^{\operatorname{Re}}(\mathbf{y}', k)], \quad (44)$$

$$I_{12\alpha}^U(x') + J_{12\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [E_{2\alpha'}^{\operatorname{Im}}(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k) - E_{2\alpha'}(\alpha, k)g^{\operatorname{Im}}(\mathbf{y}', k)], \quad (45)$$

$$I_{21\alpha}^U(x') + J_{21\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [E_{1\alpha'}^{\operatorname{Im}}(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k) - E_{1\alpha'}(\alpha, k)g^{\operatorname{Im}}(\mathbf{y}', k)], \quad (46)$$

$$I_{22\alpha}^U(x') + J_{22\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (4\nu - 3) \operatorname{Re} [E_{2\alpha'}^0(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k)] - \operatorname{Im} [E_{2\alpha'}^{\operatorname{Im}}(\alpha, k)g(\mathbf{y}', k)] + \operatorname{Im} [E_{2\alpha'}(\alpha, k)g^{\operatorname{Im}}(\mathbf{y}', k)] \right\}. \quad (47)$$

$g^{(\cdot)}(\mathbf{y}', k)$  - funkcje lokalne



# Transformacja W-L

## Transformowane momenty

Momenty potencjału warstwy pojedynczej i objętościowego:

$$E_{i\alpha'}^0(\alpha, l) = \begin{cases} \ln z' A_{i\alpha}^0(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{l+k-1}{k-1} (z')^{-k-l} A_{i\alpha}(k) & \text{dla } l = 0, \\ -\frac{1}{l} (z')^{-l} A_{i\alpha}^0(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{l+k-1}{k-1} (z')^{-k-l} A_{i\alpha}(k) & \text{dla } l = 1, 2, \dots, \infty; \end{cases} \quad (48)$$

$$E_{i\alpha'}(\alpha, l) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l+k}{k} (z')^{-k-l-1} A_{i\alpha}(k), \quad (49)$$

$$E_{i\alpha'}^{Re}(\alpha, l) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l+k}{k} (z')^{-k-l-1} \left[ \operatorname{Re} z' A_{i\alpha}(k) - A_{i\alpha}^{Re}(k) \right]. \quad (50)$$

$$E_{i\alpha'}^{Im}(\alpha, k) : \operatorname{Re} \rightarrow \operatorname{Im}, A_{i\alpha}^{Re}(k) \rightarrow A_{i\alpha}^{Im}(k)$$



# Szereg lokalny

## Funkcje lokalne

$$g(\mathbf{y}', k) = (\mathbf{y}')^k, \quad (51)$$

$$g^{Re}(\mathbf{y}', k) = (\mathbf{y}')^k \operatorname{Re} \mathbf{y}', \quad (52)$$

$$g^{Im}(\mathbf{y}', k) = (\mathbf{y}')^k \operatorname{Im} \mathbf{y}'. \quad (53)$$



# Szereg lokalny

## Potencjał warstwy podwójnej

$$I_{11\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [2(\nu-1) F_{1\alpha'}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) + F_{1\alpha'}^{2Re}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) + F_{1\alpha'}^{Re}(\alpha, k) g^{Re}(\mathbf{y}', k) + F_{1\alpha'}^{2Im}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) + F_{1\alpha'}^{Im}(\alpha, k) g^{Im}(\mathbf{y}', k)], \quad (54)$$

$$I_{12\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} [-F_{2\alpha'}^{2Re}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{Re}(\alpha, k) g^{Re}(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{2Im}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{Im}(\alpha, k) g^{Im}(\mathbf{y}', k) + (1-2\nu) F_{2\alpha'}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k)], \quad (55)$$

$$I_{21\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} [-F_{1\alpha'}^{2Re}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{1\alpha'}^{Re}(\alpha, k) g^{Re}(\mathbf{y}', k) - F_{1\alpha'}^{2Im}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{1\alpha'}^{Im}(\alpha, k) g^{Im}(\mathbf{y}', k) - (1-2\nu) F_{1\alpha'}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k)], \quad (56)$$

$$I_{22\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [2(\nu-1) F_{2\alpha'}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{2Re}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{Re}(\alpha, k) g^{Re}(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{2Im}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{Im}(\alpha, k) g^{Im}(\mathbf{y}', k)]. \quad (57)$$



# Szereg lokalny

## Potencjał warstwy podwójnej

$$I_{11\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [2(\nu-1) F_{1\alpha'}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) + F_{1\alpha'}^{2Re}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) + F_{1\alpha'}^{Re}(\alpha, k) g^{Re}(\mathbf{y}', k) + F_{1\alpha'}^{2Im}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) + F_{1\alpha'}^{Im}(\alpha, k) g^{Im}(\mathbf{y}', k)], \quad (54)$$

$$I_{12\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} [-F_{2\alpha'}^{2Re}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{Re}(\alpha, k) g^{Re}(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{2Im}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{Im}(\alpha, k) g^{Im}(\mathbf{y}', k) + (1-2\nu) F_{2\alpha'}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k)], \quad (55)$$

$$I_{21\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} [-F_{1\alpha'}^{2Re}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{1\alpha'}^{Re}(\alpha, k) g^{Re}(\mathbf{y}', k) - F_{1\alpha'}^{2Im}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{1\alpha'}^{Im}(\alpha, k) g^{Im}(\mathbf{y}', k) - (1-2\nu) F_{1\alpha'}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k)], \quad (56)$$

$$I_{22\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [2(\nu-1) F_{2\alpha'}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{2Re}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{Re}(\alpha, k) g^{Re}(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{2Im}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{Im}(\alpha, k) g^{Im}(\mathbf{y}', k)]. \quad (57)$$

$F_{i\alpha'}^{(\cdot)}(\alpha, k)$  - momenty lokalne



# Szereg lokalny

## Potencjał warstwy podwójnej

$$I_{11\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [2(\nu-1) F_{1\alpha'}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) + F_{1\alpha'}^{2Re}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) + F_{1\alpha'}^{Re}(\alpha, k) g^{Re}(\mathbf{y}', k) + F_{1\alpha'}^{2Im}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) + F_{1\alpha'}^{Im}(\alpha, k) g^{Im}(\mathbf{y}', k)], \quad (54)$$

$$I_{12\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} [-F_{2\alpha'}^{2Re}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{Re}(\alpha, k) g^{Re}(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{2Im}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{Im}(\alpha, k) g^{Im}(\mathbf{y}', k) + (1-2\nu) F_{2\alpha'}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k)], \quad (55)$$

$$I_{21\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} [-F_{1\alpha'}^{2Re}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{1\alpha'}^{Re}(\alpha, k) g^{Re}(\mathbf{y}', k) - F_{1\alpha'}^{2Im}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{1\alpha'}^{Im}(\alpha, k) g^{Im}(\mathbf{y}', k) - (1-2\nu) F_{1\alpha'}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k)], \quad (56)$$

$$I_{22\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [2(\nu-1) F_{2\alpha'}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{2Re}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{Re}(\alpha, k) g^{Re}(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{2Im}(\alpha, k) g(\mathbf{y}', k) - F_{2\alpha'}^{Im}(\alpha, k) g^{Im}(\mathbf{y}', k)]. \quad (57)$$

$g^{(\cdot)}(\mathbf{y}', k)$  - funkcje lokalne





# Transformacja W-L

## Transformowane momenty

Momenty potencjału warstwy podwójnej:

$$F_{i\alpha'}(\alpha, l) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l+k}{k} (z')^{-k-l-1} B_{i\alpha}(k), \quad (58)$$

$$F_{i\alpha'}^{Re}(\alpha, l) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{l+k+1}{k+1} (z')^{-k-l-2} B_{i\alpha}^{Re}(k), \quad (59)$$

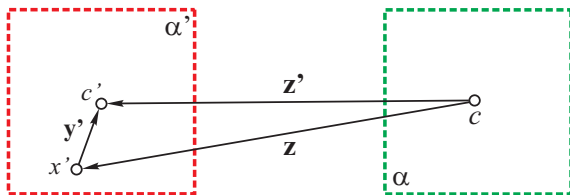
$$F_{i\alpha'}^{2Re}(\alpha, l) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{l+k+1}{k+1} (z')^{-k-l-2} [B_{i\alpha}^{2Re}(k) - \operatorname{Re} z' B_{i\alpha}^{Re}(k)]. \quad (60)$$

$$F_{i\alpha'}^{Im}(\alpha, k), F_{i\alpha'}^{2Im}(\alpha, k) : \operatorname{Re} \rightarrow \operatorname{Im}, B_{i\alpha}^{Re}(k) \rightarrow B_{i\alpha}^{Im}(k), B_{i\alpha}^{2Re}(k) \rightarrow B_{i\alpha}^{2Im}(k)$$



# Szereg lokalny

## Podsumowanie



$E_{i\alpha'}^{(\cdot)}(\alpha, k), F_{i\alpha'}^{(\cdot)}(\alpha, k)$  - zależne od wektora  $\mathbf{z}'$   
 $g^{(\cdot)}(\mathbf{y}', k)$  - zależne od wektora  $\mathbf{y}'$

Transformacja W-L i szereg lokalny pozwalają na rozdział wpływu do wielu punktów kolokacji, za pomocą tych samych momentów lokalnych.

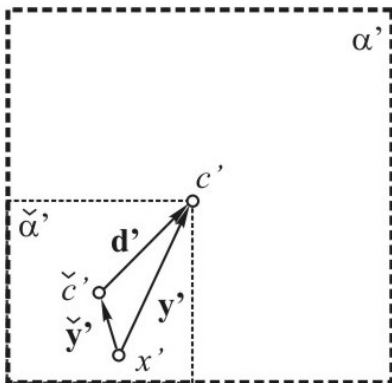


# Plan prezentacji

- 1 Ogólny opis metody
- 2 Szereg wielobiegunowy
- 3 Transformacja W-W
- 4 Szereg lokalny i transformacja W-L
- 5 Transformacja L-L**
- 6 Obliczanie naprężeń
- 7 Literatura



# Transformacja L-L



*Przesunięcie punktu rozwinięcia lokalnego o wektor  $-d'$*



# Transformacja L-L

$$\check{X}_{i\alpha'}(\alpha, l) = \sum_{k=l}^{\infty} \binom{k}{l} (\mathbf{d}')^{k-l} X_{i\alpha'}(\alpha, k)$$

$$\text{dla } \check{X}_{i\alpha'}(\alpha, l) \in \left\{ \check{E}_{i\alpha'}^0(\alpha, l), \check{E}_{i\alpha'}(\alpha, l), \check{F}_{i\alpha'}(\alpha, l), \check{F}_{i\alpha'}^{Re}(\alpha, l), \check{F}_{i\alpha'}^{Im}(\alpha, l) \right\}, \quad (61)$$

$$\check{E}_{i\alpha'}^{Re}(\alpha, l) = \sum_{k=l}^{\infty} \binom{k}{l} (\mathbf{d}')^{k-l} \left[ E_{i\alpha'}^{Re}(\alpha, k) - \text{Re } \mathbf{d}' E_{i\alpha'}(\alpha, k) \right], \quad (62)$$

$$\check{F}_{i\alpha'}^{2Re}(\alpha, l) = \sum_{k=l}^{\infty} \binom{k}{l} (\mathbf{d}')^{k-l} \left[ F_{i\alpha'}^{2Re}(\alpha, k) - \text{Re } \mathbf{d}' F_{i\alpha'}^{Re}(\alpha, k) \right]. \quad (63)$$

$$\left\{ \check{E}_{i\alpha'}^{Im}(l), \check{F}_{i\alpha'}^{2Im}(l) \right\} : Re \rightarrow Im,$$

$$\left\{ E_{i\alpha'}^{Re}(k), F_{i\alpha'}^{Re}(k), F_{i\alpha'}^{2Re}(k) \right\} \rightarrow \left\{ E_{i\alpha'}^{Im}(k), F_{i\alpha'}^{Im}(k), F_{i\alpha'}^{2Im}(k) \right\}$$



# Plan prezentacji

- 1 Ogólny opis metody
- 2 Szereg wielobiegunowy
- 3 Transformacja W-W
- 4 Szereg lokalny i transformacja W-L
- 5 Transformacja L-L
- 6 Obliczanie naprężeń
- 7 Literatura



# Obliczanie naprężeń

## Potencjały równania brzegowego naprężeń

Pochodne potencjałów równania przemieszczeń względem współrzędnych punktu  $x'$ :

$$\frac{\partial}{\partial x'_j} \left\{ \sum_{\beta} \int_{\Gamma_{\beta}} U_{ik}(x', x) t_{k\beta} d\Gamma(x) \right\} = - \sum_k I_{ik\alpha, j}^U(x'), \quad (64)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_j} \left\{ \sum_{\gamma} \int_{\Omega_{\gamma}} U_{ik}(x', x) b_{k\gamma} d\Omega(x) \right\} = - \sum_k J_{ik\alpha, j}^U(x'), \quad (65)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_j} \left\{ \sum_{\beta} \int_{\Gamma_{\beta}} T_{ik}(x', x) u_{k\beta} d\Gamma(x) \right\} = - \sum_k I_{ik\alpha, j}^T(x'). \quad (66)$$



# Obliczanie naprężeń

## Potencjały równania brzegowego naprężeń

Nowe potencjały:

$$I_{ijk\alpha}^U(x') = I_{ik\alpha,j}^U(x'), \quad (64)$$

$$J_{ijk\alpha}^U(x') = J_{ik\alpha,j}^U(x'), \quad (65)$$

$$I_{ijk\alpha}^T(x') = J_{ik\alpha,j}^T(x'), \quad (66)$$

obliczane są za pomocą szeregu lokalnego przez zastąpienie funkcji  $g^{(\cdot)}(\mathbf{y}', k)$  ich pochodnymi:

$$g_{,j}(\mathbf{y}', k) = k(\mathbf{y}')^{k-1} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ i \end{array} \right\}, \quad (67)$$

$$g_{,j}^{\text{Re}}(\mathbf{y}', k) = k(\mathbf{y}')^{k-1} \text{Re}(\mathbf{y}') \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\} + (\mathbf{y}')^k \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ i \end{array} \right\}, \quad (68)$$

$$g_{,j}^{\text{Im}}(\mathbf{y}', k) = k(\mathbf{y}')^{k-1} \text{Im}(\mathbf{y}') \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\} + (\mathbf{y}')^k \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ i \end{array} \right\}. \quad (69)$$





# Obliczanie naprężeń

## Potencjały równania brzegowego naprężeń

Na przykład:

$$I_{1j1\alpha}^U(x') + J_{1j1\alpha}^U(x') = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (4\nu - 3) E_{1\alpha'}^0(k) g_{,j}(\mathbf{y}', k) \right. \\ \left. + E_{1\alpha'}^{Re}(k) g_{,j}(\mathbf{y}', k) - E_{1\alpha'}(k) g_{,j}^{Re}(\mathbf{y}', k) \right], \quad (64)$$

$$I_{1j1\alpha}^T(x') = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ 2(\nu - 1) F_{1\alpha'}(k) g_{,j}(\mathbf{y}', k) + F_{1\alpha'}^{2Re}(k) g_{,j}(\mathbf{y}', k) \right. \\ \left. + F_{1\alpha'}^{Re}(k) g_{,j}^{Re}(\mathbf{y}', k) + F_{1\alpha'}^{2Im}(k) g_{,j}(\mathbf{y}', k) + F_{1\alpha'}^{Im}(k) g_{,j}^{Im}(\mathbf{y}', k) \right]. \quad (65)$$



# Obliczanie naprężeń

## Potencjały równania brzegowego naprężeń

Ostatecznie:

$$\sum_{\beta} \int_{\Gamma_{\beta}} U_{ijk}(x', x) t_{k\beta} d\Gamma(x) = \sum_k \left\{ \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} I_{llk\alpha}^U(x') + \mu [I_{ijk\alpha}^U(x') + I_{jik\alpha}^U(x')] \right\}. \quad (64)$$






Do obliczenia potencjałów równania naprężeń można wykorzystać momenty wielobiegunowe i lokalne, oraz ich transformacje takie same jak w przypadku równania przemieszczeń.







# Plan prezentacji

- 1 Ogólny opis metody
- 2 Szereg wielobiegunowy
- 3 Transformacja W-W
- 4 Szereg lokalny i transformacja W-L
- 5 Transformacja L-L
- 6 Obliczanie naprężeń
- 7 Literatura



-  Beatson R., Greengard L., A short course on fast multipole methods, <http://www.math.nyu.edu/faculty/greengar/>
-  Carrier J., Greengard L., Rokhlin V., A fast adaptive multipole algorithm for particle simulations, *SIAM J Sci Stat Comp*, 9, 4, 669-686, 1988.
-  Dreszer J. (red.), *Poradnik inżyniera. Matematyka*, WNT, Warszawa, 1971.
-  Greengard L., Rokhlin V., A fast algorithm for particle simulations, *J Comput Phys*, 73, 325-348, 1987.
-  Liu Y.J., A new fast multipole boundary element method for solving large-scale two-dimensional elastostatic problems, *Int J Numer Meth Eng*, 65, 863-881, 2006.



-  Liu Y.J., Nishimura N., The fast multipole boundary element method for potential problems: A tutorial, *Eng Anal Bound Elem*, 30, 371-381, 2006.
-  Nishimura N., Fast multipole accelerated boundary integral equation methods, *Appl Mech Rev*, 55, 4, 299-324, 2002.
-  Rokhlin V., Rapid Solution of Integral Equations of Classical Potential Theory, *J Comput Phys*, 60, 187-207, 1983.
-  Yamada Y., Hayami K., A multipole boundary element method for two dimensional elastostatics, Tech. Report, METR 95-07, Math. Eng. Section, Dept. Math. Eng., Information. Phys., Univ. Tokyo, 1995.



# Koniec części I

LaTeX Template based on Oxygen, <http://www.kde.org/kdeslides/>